

上周题目回顾

《一题多解》:已知 $x, y \geq 0$ 且 $x+y=1$,求 x^2+y^2 的取值范围。看看你能想出几种巧妙的解答方法。

变量替换、数形结合“逮”住大小值

“一题多解是解数学题中最常用的方法。因思考的角度不同可得到多种不同的思路。”锐林辅导学校的陈建林老师认为,学生通过广阔寻求多种解法,有助于拓宽解题思路和思维能力,提高学生分析问题和应变能力的培养。而老师在例题讲解中多运用一题多解和一题多变,可让学生从一个题中获得解题的规律和技巧,从而举一反三。本期的这道题,就可以从多角度进行分析和设项求解。

晚报记者 唐善普

动脑

子

本题可通过函数思想、三角换元和对称换元法三种方法来解答。这是中学阶段基本的数学思想之一。这三种方法在本质上都一样,都是通过函数观点来求最值,只是换元方式的不同,导致了化简运算量大小不同。教师通过引导、启发学生主动思考、运用,提高学生对数学的认识,也增强了思维能力的提高。

解法一:函数思想。它揭示了一种变量之间的联系,往往用函数观点来探求变量的最值。对二元或多元函数的最值问题,往往是通过变量替换转化为一元函数来解决,这是一种

换

方法

“除了上面的三种方法外,学生还可以试着运用基本不等式、数形结合等方法来解本题。”陈老师提醒说,在解决一些含有两个未知量的最值问题时,要注意等号成立的条件是否同时满足,否则易于出错。

解法四:运用基本不等式。由 $x, y \geq 0$ 且 $x+y=1$,则 $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}$,推断 $0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$ 。于是,

本期

题目

夏天的夜晚一阵电闪雷鸣,一场暴雨之后雨过天晴,路面留下了很多水洼。

- 1.从看见闪电到听到雷声经过了15秒,那么人离打雷处有多远?
- 2.月光下有一个人迎着月光走,地面上有的地方明有的地方暗,那么究竟明处是水洼,还是暗处是水洼呢?如果他背着月光走呢?



周悟空 图

通过函数观点“换元”求最值

基本的数学思想方法。

由 $x+y=1$ 得 $y=1-x$,则 $x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$ 。由于 $x \in [0, 1]$,根据二次函数的图像与性质知:当 $x=\frac{1}{2}$ 时, x^2+y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$;当 $x=0$ 或 1 时, x^2+y^2 取最大值 1 。

解法二:三角换元。将问题转化为三角恒等式,然后变形来解决,而三角恒等变形却有着一系列的三角公式,往往运用三角换元解决某些问题比较方便。

由于 $x+y=1, x, y \geq 0$,则可设 $x=\cos^2\theta, y=\sin^2\theta$ 其中 $\theta \in [0, \pi/2]$ 则 $x^2+y^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta$

数形结合法培养发散思维

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy$,当 $xy=0$ 时, x^2+y^2 取最大值 1 ;当 $xy=\frac{1}{4}$ 时, x^2+y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$ 。

解法五:解析几何思想。用几何的观点研究代数问题,可以加强学生数形结合思想的养成,能够由数想到形的意义,由形想到数的结构,达到快速解决问题的目的,这对学生数学思维能力的培养有很好的作用。

答案

(函数法)由 $x+y=1$ 得

$$y=1-x, \text{则 } x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$

由于 $x \in [0, 1]$,根据二次函数的图像与性质知

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, x^2+y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$;

当 $x=0$ 或 1 时, x^2+y^2 取最大值 1 。

$$=1-\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2=1-\frac{1}{2}\sin^22\theta$$

$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1-\cos4\theta)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\theta$$

当 $\cos4\theta=-1$ 时, x^2+y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$;

当 $\cos4\theta=1$ 时, x^2+y^2 取最大值 1 。

解法三:对称换元。将减元结果进行简化,从而更容易求最值。

由于 $x+y=1, x, y \geq 0$,则可设 $x=\frac{1}{2}+t, y=\frac{1}{2}-t$,其中 $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

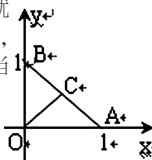
于是, $x^2+y^2=(\frac{1}{2}+t)^2+(\frac{1}{2}-t)^2=\frac{1}{2}+2t^2, t^2 \in [0, \frac{1}{4}]$

当 $t=0$ 时, x^2+y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$;当 $t^2=\frac{1}{4}$ 时, x^2+y^2 取最大值 1 。

设 $d^2=x^2+y^2$,则 d 为动点 $C(x, y)$ 到原点 $(0, 0)$ 的距离,只需求线段 $x+y=1, x \geq 0, y \geq 0$ 上的点到原点的最大和最小距离就可。当点 C 与 A 或 B 重合时,

$d_{\max}=1$,则 $(x^2+y^2)_{\max}=1$,当

$OC \perp AB$ 时 $d_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $(x^2+y^2)_{\min}=\frac{1}{2}$ 。

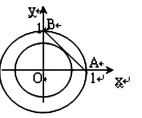


上期
答案

一题多解

设 $x^2+y^2=r^2 (r>0)$,此二元方程表示以坐标原点为圆心、半径为 r 的动圆,记为 $\odot F$ 。问题转化为 $\odot F$ 与线段 $x+y=1, x \geq 0, y \geq 0$,有公共点,求 r 的变化范围。

当 $\odot F$ 经过线段 AB 端点时 $r_{\max}=1$;当 $\odot F$ 与线段 AB 相切时 $r_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则得出: $\frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1$ 。



【上期获奖名单】

155XXXXX595 李沛宸
137XXXXX418 邓灏棋
136XXXXX533 马叶萱

上期奖品是由锐林辅导学校提供的书包一个,以及郑州晚报中原手机报提供的免费电影票2张,获奖读者如使用电信或联通手机,请联系我们,将免费为您开通2011年全年《中原手机报》一份。

领奖地址

锐林工人路校区:工人路与汝河路交叉口向南50米路西二楼三楼
领奖热线 67003960

参与方式



1.电子邮件,可发送解题步骤和答案+学生姓名+年龄+学校+家长姓名及联系方式(方便我们通知获奖读者)至电子邮箱:zzwb_hd@sina.com

2.晚报QQ群,可加入晚报QQ群参与互动,群号:134536525

本版由《郑州晚报·第一教育》与《中原手机报》共同主办。

本期奖品是由锐林辅导学校提供的书包一个,以及郑州晚报中原手机报提供的免费电影票2张,获奖读者如使用电信或联通手机,请联系我们,将免费为您开通2011年全年《中原手机报》一份。
如果您知道答案,赶快行动吧!(本活动仅限18周岁以下学生参与)
提示:为答谢广大读者的长期关注与支持,郑州晚报互动学苑栏目特别推出“积分制”答题,参与答题但未回答正确者积1分,答对题目者积2分,以此方式进行统计,活动持续至2011年底,评选出“睿智少年奖”。

十九年专业高三复读

郑州新世纪高考补习学校

面向全省招收高三复读生4600名

★清华北大班 300名 ★奋进优化班 120名 ★播音主持与编导 300名
★北京科学应考班 200名 ★美术特长班 600名 ★高三应届生 300名

贺:我校学生周鑫、朱文明、王智慧被清华大学录取
牛盾、黄若瑶被中央美院录取 网址: www.zzsxj.cn

电话: (0371) 63975552 63970497 63970250 63970249 聘

地址: 郑州市优胜北路4号(郑州市儿童医院向东50米, 优胜北路与劳卫路交叉口路北) 教龄一名

郑州旅游职业学院

六项措施践行“文明出行”

7月22日上午,郑州市教育系统“文明出行”倡议暨中小学生志愿者夏令营启动仪式在郑州市第十九中学举行。市教育局局属各学校负责人、郑州市第十九中学200名学生和50名教师代表参加了本次活动,郑州旅游职业学院在活动中将采取六项措施积极响应市委、市政府关于“积极参与维护交通秩序和社会公益事业,做奉献社会的公益人,做维护秩序的热心人,做文明出行的好市民”的号召,进一步提升全院师生文明交通意识,共同创造安全、畅通、和谐、文明的道路交通环境。

据介绍,作为以培训礼仪课程而出名的郑州旅游职业学院及时召开座谈会,将采取六项措施树立师德风范,号召全院师生积极行动起来,在更大范围内参与维护交通秩序和社会公

益事业,做奉献社会的公益人,做维护秩序的热心人,做文明出行的好市民,同时 will 充分发挥暑期社会实践活动的优势,组织开展形式多样的“文明出行”系列活动,来提高全院教职员工、学生的交通文明出行意识;还将通过校内网向全院教职员工和学生征集“文明出行”倡议书、承诺书活动,最终内化为师生“文明出行”的行为准则;每天通过“手机快讯”向党员干部提醒“文明出行”相关事宜;向学生及家长寄送“文明出行”倡议书、承诺书。另外,将利用暑期时间,组织学院师生开展“文明出行”志愿者活动,通过在交通路口设立交通文明岗,纠正市民不文明交通行为;组织部分学生进社区,宣传“文明出行”常识法规,力求促成广大市民“文明出行”行为的养成。

晚报记者 张国庆